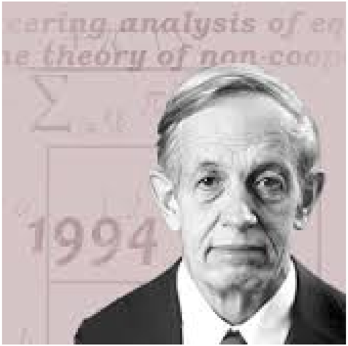
Les aportacions de John F. Nash a l'Economia: equilibri i negociació

Jordi Massó (UAB, Barcelona GSE)

Societats Catalanes d'Economia i de Matemàtiques, filials de l'IEC

9 de novembre de 2015

John F. Nash



John F. Nash

- Neix a Bluefield, West Virginia, el 13 de juny de **1928**.
- Juny **1945**. Inicia estudis d'enginyeria química a Carnegie Tech i es gradua (BA i MA) en matemàtiques el **1948**.
- Setembre de **1948**. Inicia el estudis de doctorat a Princeton i defensa la tesis (de 28 pàgines) *Non-cooperative Games* el maig de **1950**.
- **1951-1959**. Professor de matemàtiques al MIT.
- Premi Nobel d'Economia el **1994**, juntament amb John Harsanyi i Reinhard Selten, *per les seves anàlisis de l'equilibri en la teoria dels jocs no cooperatius.*
- Premi Abel el **2015**, juntament amb Louis Nirenberg, *per les contribucions notables i fonamentals a la teoria d'equacions no linials en derivades parcials i les seves aplicacions a l'anàlisi geomètrica*.
- Mor a New Jersey el 23 de maig de **2015**.

Les contribucions de Nash a la Teoria de Jocs (i a l'Economia)

- Equilibri de Nash (per jocs no cooperatius).
  - J. Nash. "Equilibrium Points in $n-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 48-49 (1950).
  - J. Nash. "Non-cooperative Games," *Annals of Mathematics* 54, 286-295 (1951).
- Solució axiomàtica de Nash al problema de la negociació (jocs cooperatius).
  - J. Nash. "The Bargaining Problem," *Econometrica* 18, 155-162 (1950).
- El programa de Nash (implementació no cooperativa de les solucions cooperatives).
  - J. Nash. "Two-person Cooperative Games," *Econometrica* 21, 128-140 (1953).

Equilibri de Nash: Joc no cooperatiu

- Conjunt de *jugadors* $N = \{1, ..., n\}$.
- Cada jugador $i \in N$ ha de triar una *estratègia* $s_i \in S_i$.
- *Vector d'estratègies*:

$$s = (s_1, ..., s_n) \in S_1 \times ... \times S_n \equiv S.$$

- *Funció de pagaments*. Per cada $i \in N$, $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Els jugadors poden tenir opinions (potencialment diferents) sobre quin és el millor vector d'estratègies.
- Implícitament,
  - cada $i \in N$, té una *funció d'utilitat* (vNM) $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ [amb la propietat de la utilitat esperada];
  - hi ha una funció $g : S \longrightarrow Z$;
  - és a dir, per a tot $s \in S$ i $i \in N$, $h_i(s) = u_i(g(s))$.

Equilibri de Nash: joc no cooperatiu en forma normal

- Un joc en forma *normal* o *estratègica* és un triplet

$$G = (N, (S_i)_{i\in N}, (h_i)_{i\in N}).$$

  - Exemples: Subhastes, competència en preus, etc.

- **Problema:** Pot no existir l'estratègia òptima s_i^* per al jugador $i \in N$, ja que aquesta pot dependre de l'estratègia dels altres (s_{-i}).

- **Exemple: Matching pennies**

$1\backslash 2$	C	$+$
C	1,-1	-1, 1
$+$	-1, 1	1,-1

- **Exemple: La batalla dels sexes**

h/d	F	B
F	3, 1	0, 0
B	0, 0	1, 3

Equilibri de Nash

- **Definició** Sigui $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (h_i)_{i \in N})$ un joc en forma normal. Un vector d'estratègies $s^* \in S$ és un *equilibri de Nash* de G si per a tot $i \in N$,

$$h_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq h_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ per a tot } s_i \in S_i.$$

- Sigui S^* el conjunt d'equilibris de Nash de G.
- Problemes:
  - Existència (Matching Pennies).
  - Multiplicitat (Batalla dels sexes).

Interpretació de l'equilibri de Nash

Predicció consistent

- $s^* \in S^*$ és un acord previ estable.
- Suposem que $s \notin S^*$; això és, existeixen $i \in N$ i $s_i' \in S_i$ tals que $h_i(s_i', s_{-i}) > h_i(s_i, s_{-i})$. Per tant, o bé
  - i esperava s_{-i} però no és racional (i no tria la millor estratègia, donat s_{-i}) o bé
  - i esperava una altra estratègia dels altres; és a dir, existeix $s_{-i}^e \neq s_{-i}$ tal que $h_i(s_i, s_{-i}^e) \geq h_i(s_i'', s_{-i}^e)$ per a tot $s_i'' \in S_i$.
- Per tant, si els jugadors són racionals i fan prediccions consistents han de jugar un equilibri de Nash.

L'extensió mixta d'un joc (finit) en forma normal

- Hi ha jocs en forma normal que no tenen equilibri de Nash (matching pennies).

- Extenem els conjunts d'estratègies dels jugadors (distribucions de probabilitat en S_i) [matching pennies!!].

- Un joc en forma normal $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (h_i)_{i \in N})$ és *finit* si $\# N < \infty$ i, per a tot $i \in N$, $\# S_i < \infty$.

- **Definició** Sigui $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (h_i)_{i \in N})$ un joc finit en forma normal. Definim l'*extensió mixta* de G com el joc en forma normal

$$G^* = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (H_i)_{i \in N}),$$

on

L'extensió mixta d'un joc (finit) en forma normal

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\} \\ &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ per a tot } j = 1, ..., \#S_i \text{ i } \sum_{j=1}^{\#S_i} x_j = 1\}.\end{aligned}$$

- σ_i és una distribució de probabilitat en el conjunt S_i (finit).
- Denotem $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) = (\sigma_i)_{i \in N} \in \Sigma = \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$.
- Definim $H_i : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ com el pagament esperat pel jugador i si els jugadors trien σ. Això és, per a tot $\sigma \in \Sigma$,

$$H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \cdot h_i(s).$$

- Les estratègies σ_i's són independents: la probabilitat de que triin el vector d'estratègies pures $s = (s_1, ..., s_n)$ és igual a $\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j)$.

Equilibri de Nash: Teorema

- Donat un joc en forma normal $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (h_i)_{i \in N})$, construim la seva extensió mixta $G^* = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (H_i)_{i \in N})$.

- G^* és també un joc en forma normal.

- Podem aplicar a G^* el concepte d'equilibri de Nash. És a dir,

  $\Sigma^* = \{\sigma^* \in \Sigma \mid \text{per a tot } i,\ H_i(\sigma^*) \geq H_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}) \text{ per a tot } \sigma_i \in \Sigma_i\}.$

  - J. Nash. "Equilibrium Points in $n-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 48-49 (1950).
  - J. Nash. "Non-cooperative Games," *Annals of Mathematics* 54, 286-295 (1951).

Teorema (Nash, 1950)

Sigui G un joc finit en forma normal. Llavors, $\Sigma^* \neq \emptyset$.

Equilibri de Nash: demostració

Demostració Sigui G un joc finit en forma normal.

- Per cada $i \in N$, definim la *correspondència de la millor resposta per* i, $B_i : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_i$. Per a tot $\sigma \in \Sigma$,

$$B_i(\sigma) = \{\sigma'_i \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ per a tot } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}.$$

- Definim la *correspondència de la millor resposta* $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$. Per a tot $\sigma \in \Sigma$,

$$B(\sigma) = (B_1(\sigma), ..., B_n(\sigma)).$$

- **Observació:** El conjunt d'equilibris de Nash de G^* és el conjunt de punts fixos de B; és a dir,

$$\sigma^* \in \Sigma^* \text{ si i només si } \sigma^* \in B(\sigma^*).$$

- Pel Teorema de Kakutani (1941), la correspondència de la millor resposta B de l'extensió mixta G^* de G té un conjunt no buit de punts fixos.

▸ Exemple ▸ Antecedents ▸ Negociació

Equilibri de Nash

- El gràfic de $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ és el conjunt

$$Graf(B) = \{(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma \mid \sigma' \in f(\sigma)\}.$$

- **Teorema** (Kakutani, 1941) *Sigui $K \subseteq R^m$ un subconjunt no buit, compacte i convex i sigui $f : K \twoheadrightarrow K$ una correspondència amb un gràfic tancat tal que per a tot $x \in K$, el conjunt $f(x)$ és no buit i convex. Llavors, f té almenys un punt fix; és a dir, existeix $x^* \in K$ tal que $x^* \in f(x^*)$.*

Equilibri de Nash

- **Demostració del Teorema de Nash.** Com que G és finit:
  - Σ és un conjunt no buit, compacte i convex d'un espai euclidià multidimensional (finit).
  - Per a tot $\sigma \in \Sigma$, $B(\sigma)$ és no buit i convex.
  - El conjunt $\mathit{Graf}(B)$ és tancat.

▸ Antecedents ▸ Negociació

Equilibri de Nash

- **Observació** (molt important) Suposem que $\sigma^* \in \Sigma^*$. Siguin $i \in N$ i $\bar{s}_i, \hat{s}_i \in S_i$ tals que $\sigma_i^*(\bar{s}_i), \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$. Llavors,

$$H_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*).$$

  - J. Nash. "Non-cooperative Games," *Annals of Mathematics* 54, 286-295 (1951).

- En equilibri el jugador i assigna probabilitat positiva només a estratègies pures que són indiferents per a ell, i per tant està disposat a que la natura trii per a ell.

- Aquesta observació ens pot ajudar a calcular equilibris de Nash en estratègies mixtes.

Càlcul d'equilibris de Nash

Exemple: La batalla dels sexes

		q	$1-q$
	$h \backslash d$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

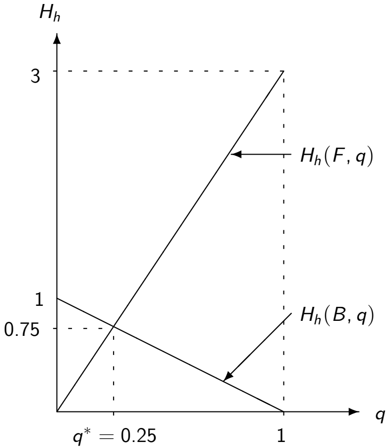
Càlcul d'equilibris de Nash

		q	$1-q$
	$h \backslash d$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

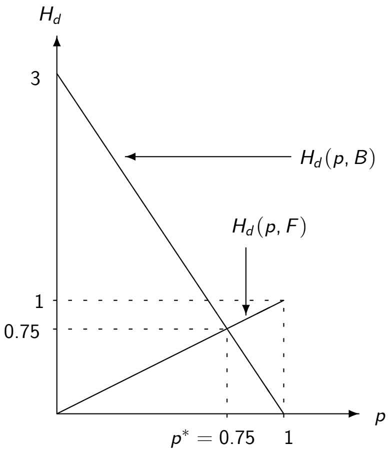
Sabem que $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Suposem que $p,q \in (0,1)$ i $(p,q) \in \Sigma^*$. Llavors,

- $H_h(F,q) = 3q$ i $H_h(B,q) = 1-q$. Per l'observació, si $p \in (0,1)$ llavors $3q = 1-q$. Per tant, $q^* = \frac{1}{4}$.
  - La indiferència de l'h entre F i B determina l'equilibri de la d en estratègies mixtes!!
- $H_d(p,F) = p$ i $H_d(p,B) = 3(1-p)$. Per l'observació, si $q \in (0,1)$ llavors $p = 3(1-p)$. Per tant, $p^* = \frac{3}{4}$.
  - La indiferència de la d entre F i B determina l'equilibri de l'h en estratègies mixtes!!

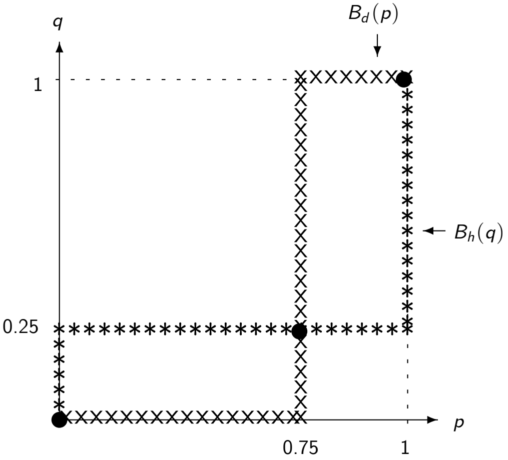
Càlcul d'equilibris de Nash



Càlcul d'equilibris de Nash



Càlcul d'equilibris de Nash



$\Sigma^* = \{(0,0),(1,1),(0.75,0,25)\}.$

▸ Negociació

Antecedents de l'equilibri de Nash

- Cournot, 1838. Bertrand, 1883. Zermelo, 1913. Hotteling, 1929. Stackelberg, 1934.
- von Neumann, J. and O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- **Teorema del minimax** (vNM, 1944).

  Sigui G un joc amb dos jugadors i suma zero (per a tot $s \in S$, $h_1(s) = -h_2(s)$). Llavors, existeixen $v \in \mathbb{R}$, el valor de G, $p_1 \in \Sigma_1$ i $p_2 \in \Sigma_2$ (estratègies òptimes) tals que per a tot $q_1 \in \Sigma_1$ i $q_2 \in \Sigma_2$:

  (i) $H_1(p_1, q_2) \geq v$.

  (ii) $H_2(q_1, p_2) \geq -v$ ($\Longleftrightarrow H_1(q_1, p_2) \leq v$).

  (iii) $\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v$.

i molt més

- Estructura temporal de les decisions (i la informació).
- Estabilitat.
- Aprenentatge.
- Equilibri fort (desviacions per grups).
- Criteris addicionals de racionalitat [refinaments].
- Racionabilitat.
- Equilibri correlacionat.
- Jocs repetits.
- Jocs amb informació incompleta.
- Equilibri estable evolutiu.
- Etc.

El problema de la negociació

- J. Nash. "The Bargaining Problem," *Econometrica* 18, 155-162 (1950).
- Un problema de negociació és una situació en la qual un conjunt d'agents (negociadors) poden cooperar (de moltes maneres) pel seu benefici mutu.
  - Però per fer-ho, l'acord ha de ser *unànim*.
  - Si no arriben a un acord, es manté l'*status quo* (o punt de desacord).
- Exemples:
  - Un venedor i un comprador s'han de posar d'acord sobre un preu.
  - La fixació de salaris entre una empresa i un sindicat.
  - Converses de pau, etc.
- Problema molt antic en Economia. Indeterminat: la solució depèn de la capacitat de negociació dels agents.

El problema de la negociació

- Conjunt d'*agents* (jugadors o negociadors): $N = \{1, ..., n\}$, $n \geq 2$.

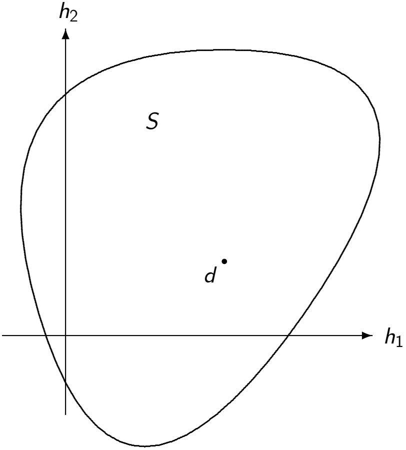
- Conjunt de possibles acords (deterministes): Z.

- Per $i \in N$, una funció d'utilitat (vNM) $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa les preferències $\succsim_i$ d'i en Z.
  - Per a tot $z, z' \in Z$, $z \succsim_i z' \Leftrightarrow u_i(z) \geq u_i(z')$.
  - La funció u_i és unica excepte per a tranformacions afins positives (per a tot $b \in \mathbb{R}$ i tot $a > 0$, $v_i = b + a{\cdot}u_i$ també representa $\succsim_i$).
  - Per tant, cada $i \in N$ té preferències $\widehat{\succsim}_i$ en el conjunt de probabilitats en Z, representades per $h_i : \Delta(Z) \longrightarrow \mathbb{R}$, amb la propietat de la utilitat esperada; és a dir, per a tot $p, p' \in \Delta(Z)$,
    - ★ $p \widehat{\succsim}_i p' \Leftrightarrow h_i(p) \geq h_i(p')$.
    - ★ $h_i(p) = \sum_{z \in Z} p(z) u_i(z)$ (o $\int_{z \in Z} u_i(z) p(z) dz$ si Z és infinit).

El problema de la negociació

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ el conjunt de *resultats possibles* en termes d'utilitats esperades.
- És a dir, $x \in S$ si i només si existeix $p \in \Delta(Z)$ tal que per a tot $i \in N$, $h_i(p) = x_i$.
- Supòsit Implícit: per determinar la solució només són rellevants les utilitats dels agents, i no els propis acords.
- Supòsits sobre S:
  - S és convex.
  - S és compacte (per exemple, si Z és finit).
  - Existeix un *punt de desacord* (*status quo*): $d \in S$.
  - Existeix $x \in S$ tal que $x_i > d_i$ per a tot $i \in N$.
- Sigui $\mathcal{B}$ el conjunt de parells (S, d) amb les propietats anteriors; és a dir, $\mathcal{B}$ és el conjunt de tots els problemes de negociació.

Un problema de negociació (n=2)



7.2.- Solució del problema de la negociació

Definició Una *solució* del problema de la negociació és una funció $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$, $f(S, d) \in S$.

- Una solució és una regla que assigna a cada problema de la negociació un vector factible d'utilitats.
- Una solució pot ser interpretada com un arbitratge que respon a un conjunt particular de principis (o axiomes) sobre com resoldre el problema de la negociació.
- Propietats desitjables de qualsevol solució segons Nash.
- Jocs cooperatiu sense utilitat transferible, i quan les coalicions intermèdies no juguen cap paper.

La solució de Nash al problema de la negociació: axiomes

EFICIÈNCIA (EF)

Definició Una solució $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfà *Eficiència* si per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$ i tot parell $x, y \in S$ tal que $x_i > y_i$ per a tot $i \in N$, $f(S, d) \neq y$.

- La solució exhaureix tots els possibles guanys de la negociació.

La solució de Nash al problema de la negociació: axiomes

Simetria (Si)

- El problema de negociació $(S,d) \in \mathcal{B}$ és *simètric* si $d_1 = \cdots = d_n$ i per a tota permutació $\pi : N \longrightarrow N$ si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ llavors $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$, on $y_j = x_{\pi(j)}$ per a tot $j \in N$.

Definició Una solució $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfà *Simetria* si per a tot problema de negociació simètric $(S,d) \in \mathcal{B}$,

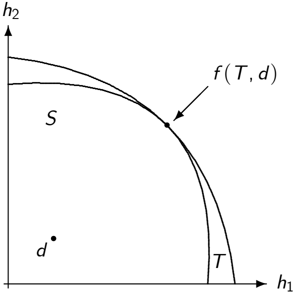
$$f_1(S,d) = \cdots = f_n(S,d).$$

- Si (S,d) és simètric no hi ha cap diferència entre els agents. Per tant, la solució no hauria de distingir-los.

La solució de Nash al problema de la negociació: axiomes

INDEPENDÈNCIA D'ALTERNATIVES IRRELEVANTS (IAI)

Definició Una solució $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfà *Independència d'Alternatives Irrelevants* si per a tot parell $(S, d), (T, d) \in \mathcal{B}$ tal que $S \subset T$ i $f(T, d) \in S$ llavors, $f(S, d) = f(T, d)$.



La solució de Nash al problema de la negociació: axiomes

INVARIÀNCIA D'ESCALA (IE)

- Per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$, tot $b = (b_1, ..., b_n)$ i tot $a = (a_1, ..., a_n)$ tal que $a_i > 0$ per a tot $i \in N$, definim $(S', d') \in \mathcal{B}$ com:
  - $S' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{existeix } x \in S \text{ t.q. per a tot } i \in N,\ y_i = b_i + a_i x_i\}$.
  - Per a tot $i \in N$, $d'_i = b_i + a_i d_i$.

Definició Una solució $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfà *Invariància d'Escala* si per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$ i tot $i \in N$,

$$f_i(S', d') = b_i + a_i f_i(S, d).$$

- La solució no depèn de la representació numèrica de les preferències dels agents sobre les distribucions de probabilitat de possibles resultats de la negociació. Els problemes (S, d) i (S', d') són equivalents i per tant, la solució proposa utilitats equivalents.

La solució de Nash al problema de la negociació

Definició La solució de *Nash al problema de la negociació* $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es defineix com: per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$, $F(S, d) = x$ on $x \in S$ és tal que $x \geq d$ i

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n} (y_i - d_i)$$

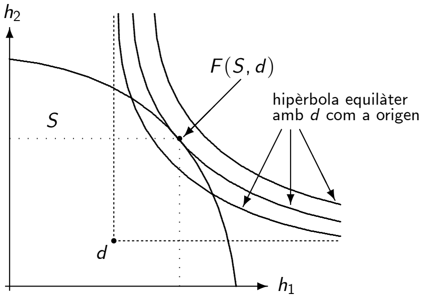
per a tot $y \in S \setminus \{x\}$ i $y \geq d$.

Teorema (Nash, 1950)

Una solució $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfà* (EF), (SI), (IAI) *i* (IE) *si i només si* $f = F$.

- L'expresió $\prod_{i=1}^{n} (x_i - d_i)$ es coneix com el producte de Nash.

La solució de Nash al problema de la negociació



Idea de la demostració

- És fàcil demostrar que la solució de Nash al problema de la negociació F satisfà (IE), $(\text{S}\textsc{i})$, (IAI) i $(\text{E}\textsc{f})$.

- La demostració de que qualsevol solució al problema de la negociació $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaci els quatre axiomes és de fet la solució de Nash F al problema de la negociació segueix tres passos:
  - Pas 1: (IE) permet tractar qualsevol problema de la negociació com a simètric.
  - Pas 2: Per $(\text{S}\textsc{i})$ i $(\text{E}\textsc{f})$ f i F han de coincidir en qualsevol problema de negociació simètric ja que només hi ha un acord eficient amb tots els components iguals.
  - Pas 3: Per (IAI) f i F coincideixen en el problema original.

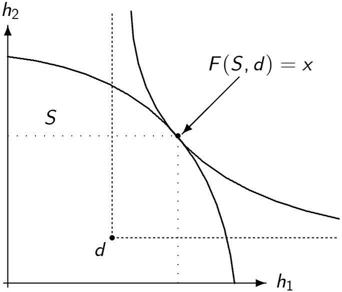
Idea de la demostració

- Sigui F una solució que satisfà els quatre axiomes.
- considerem qualsevol problema de negociació $(S, d) \in \mathcal{B}$ i definim $F(S, d) = x$.
- Per hipòtesi i $(\mathrm{E{\scriptsize F}})$, $x_i > d_i$ per a tot $i \in N$.
- Definim $(S', d') \in \mathcal{B}$ la següent transformació afí positiva de (S, d): per a tot $i \in N$, i tot $y \in S$,

$$\lambda_i(y_i) = \frac{-d_i}{x_i - d_i} + \frac{1}{x_i - d_i} y_i .$$

- Observem que $\lambda_i(x_i) = 1$ i $\lambda_i(d_i) = 0$.
- Per (IS), $F(S', d') = (1, ..., 1)$.

Idea de la demostració



per (IE)

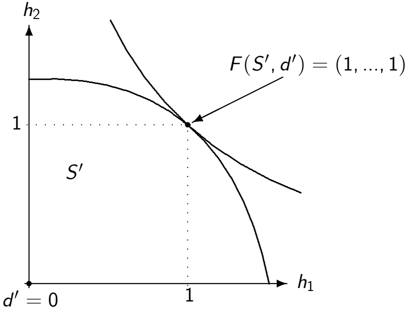


Figura 1

Figura 2

Idea de la demostració

- El vector $(1, ..., 1)$ és el maximitzador del producte de Nash en S'.
- Per tant, $x' = (1, ..., 1)$ és l'*únic* vector en la intersecció de S' i el conjunt convex
$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^{n} y_i \geq 1\}.$$
- Com que la frontera de $\prod_{i=1}^{n} y_i \geq 1$ és diferenciable, l'hiperplà
$$T = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = n\}$$
és l'únic hiperplà que és tangent a H i passa per $x' = (1, ..., 1)$.

Idea de la demostració

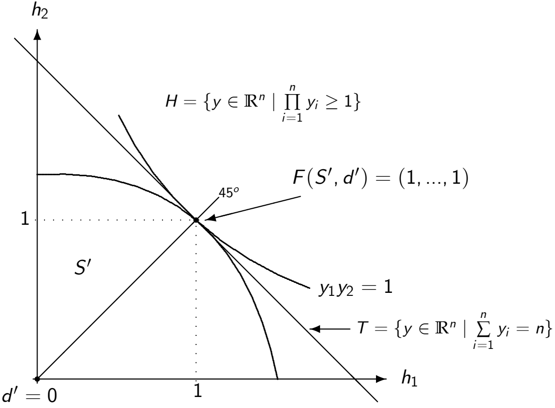


Figura 2

Figura 3

Idea de la demostració

- Com que H i S' són conjunts convexos, pel teorema de l'hiperplà separador,

$$S' \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i \leq n\}.$$

- Per tant, i com que S' és compacte, existeix un conjunt simètric R tal que $S' \subseteq R$ i $Ef(R) \subseteq T$,
  - on $Ef(R)$ és el conjunt de acords eficients d'R; és a dir,

$$Ef(R) = \{y \in R \mid \nexists x \in R \text{ t.q. } x_i > y_i \text{ per a tot } i \in N\}.$$

Idea de la demostració

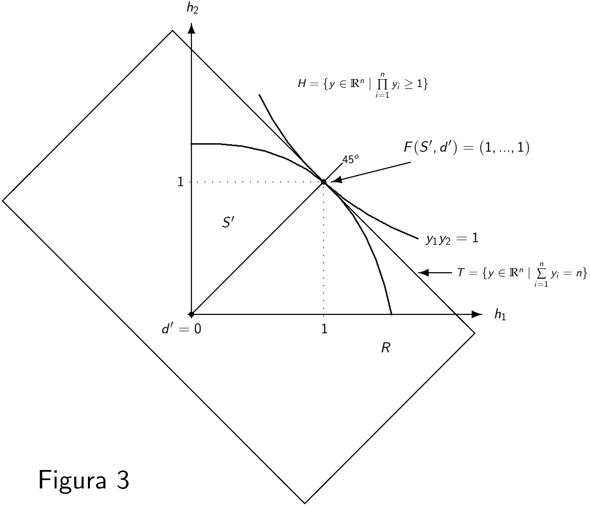


Figura 3

Idea de la demostració

- Per tant, per $(\mathrm{S{\scriptsize I}})$ i $(\mathrm{E{\scriptsize F}})$, $f(R, d') = (1, ..., 1)$.
- Per (IAI), $f(S', d') = (1, ..., 1)$.
- Per (IE), $f(S, d) = x = F(S, d)$. ∎